8. cvičení - teorie

Věta 12 (Charakterizace kompaktních množin)**.** Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.

Věta 14 (o nabývání extrémů)**.** Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná kompaktní množina a $f\colon M \to \mathbb{R}$ spojitá, pak f na M mnabývá svého maxima i minima.

Věta 16 (nutná podmínka lokálního extrému)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je ot. mn., $a \in G$ a funkce $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ má v a lokální extrém. Pak pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ platí, že $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ buď neexistuje, nebo je rovna nule.

Poznámka. Věta 16 nám dává body podezřelé z lokálního maxima a pouze na otevřené množině G - proto je potřeba si ještě hlídat hranice množiny apod.

Definice (gradient)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $g \in C^1(G)$. Pak

$$\nabla g(x) = \left(g'_{x_1}(x), \ldots, g'_{x_n}(x)\right), \quad x \in G.$$

Jde tedy o vektor parciálních derivací funkce g.

Věta 24 (Lagrangeova věta o multiplikátoru)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f, g \in C^1(G)$. Označme $M = \{x \in G\colon g(x) = 0\}$ a nechť $\tilde{x} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I) $\nabla g\left(\tilde{x}\right) = \boldsymbol{o}$,

(II) existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující $\nabla f(\tilde{x}) + \lambda \nabla g(\tilde{x}) = 0$.

Věta 25 (Lagrangeova věta o dvou multiplikátorech)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina, $f, g_1, g_2 \in C^1(G)$. Označme $M = \{x \in G\colon g_1(x) = g_2(x) = 0\}$ a nechť bod $\tilde{x} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z podmínek:

(I) existuje $k \in \mathbb{R}$ t.ž. $\nabla g_1(\tilde{x}) = k \nabla g_2(\tilde{x})$

(II) existují $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ splňující $\nabla f(\tilde{z}) + \alpha \nabla g_1(\tilde{x}) + \beta \nabla g_2(\tilde{x}) = \boldsymbol{o}$.

Návod

- vyšetřím kompaktnost M - věta 14
- vyšetřím f na $\operatorname{Int} M$ - věta 16
- vyšetřím f na $H(M)$
  - multiplikátory - věty 24, 25 (pozor je potřeba, aby G otevřená $\implies$ řešíme na $\operatorname{Int} G$ a případně vyšetříme zvlášť f na $H(G)$)
  - bod $H(M)$ lze vyjádřit jako bod závislý na méně proměnných $\implies$ dosadím jej do f a zkoumám dál
- porovnám hodnoty ve všech bodech podezřelých z extrémů a vyberu největší a nejmenší.
  - M komp. $\implies$ jde o maxima a minima
  - M omezená, ale ne komp. $\implies$ zkoumám na $\overline{M}$ a pokud extrémy vyjdou v bodech, které nejsou v M, tak jde pouze o infima/superema
  - M neomezená $\implies$ je třeba nějakým trikem ukázat, že jde skutečně o maximum/minimum (odhady, pomocí derivací apod.).